

Travaux Dirigés - Calcul Matriciel

Matrices, Systèmes et Déterminants

Exercice 1 (Recherche de commutants). Identifier toutes les matrices qui commutent avec les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec l'intégralité des matrices diagonales ? Et avec l'intégralité des matrices symétriques ?

Exercice 2 (Relation de commutation et trace). On suppose que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfont l'équation $AB - BA = 3B$. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'égalité $AB^k - B^kA = 3kB^k$ est vraie. Qu'en déduit-on concernant $\text{Tr}(B^k)$?

Exercice 3 (Équation matricielle impliquant la trace). Pour deux matrices fixes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $X - 2\text{Tr}(X)A = B$.

Exercice 4 (Polynôme annulateur et division euclidienne). Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme de degré 2 qui annule A .
2. Prouver ainsi que A est inversible et expliciter son inverse sans utiliser l'algorithme de Gauss.
3. En exploitant les racines de ce polynôme, calculer le reste de la division euclidienne de X^n par ce dernier (pour $n \geq 2$).
4. Exprimer alors la matrice A^n .

Exercice 5 (Inversion). Calculer l'inverse des matrices suivantes lorsque cela est possible :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (Changement de base). Soient $M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -1 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que

P est une matrice inversible et la calculer. Calculer ensuite la matrice $P^{-1}MP$ et s'en servir pour trouver M^n .

Exercice 7 (Inversion via la nilpotence). Soit N une matrice nilpotente. Prouver que la matrice $I - N$ admet un inverse et que celui-ci peut s'écrire $I + N + N^2 + \dots + N^k$. Appliquer ce résultat pour inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (Inversion de matrice bande). Proposer une méthode pour inverser la matrice carrée de taille $n \times n$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 (Inversion de matrice circulante). Trouver l'inverse de la matrice suivante (en utilisant par exemple les racines de l'unité) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (Résolution de systèmes linéaires). Résoudre les systèmes suivants, en effectuant une disjonction de cas si des paramètres sont présents :

$$\begin{aligned} 1. & \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -x - 2y + 4z = 3 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases} \\ 2. & \begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ x + my + z = -1 \\ x + y + mz = 0 \end{cases} \\ 3. & \begin{cases} 2x - y + 3z + 2t + w = 4 \\ x + y + 2z + 5t + 3w = 12 \\ -x + 2y - 5z + t - 2w = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 11 (Calculs de déterminants). Calculer les déterminants ci-dessous en privilégiant les opérations sur les lignes ou les colonnes pour faire apparaître des zéros :

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix}$$

Exercice 12 (Trace et matrice transposée). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer le coefficient diagonal d'indice i de la matrice $A^T A$ en fonction des coefficients $(a_{i,j})$ de la matrice A .
2. En déduire la formule : $\text{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.
3. Démontrer alors que : $\text{Tr}(A^T A) = 0 \iff A = 0$.
4. Soient A et B deux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(A^2) \leq 0$. Est-il toujours vrai que $\text{Tr}(AB) \geq 0$?

Exercice 13 (Déterminant de Vandermonde). Soient a, b et c trois nombres réels. On considère le déterminant d'ordre 3 suivant :

$$V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer $V(a, b, c)$ en effectuant des opérations sur les lignes pour faire apparaître des zéros sur la première colonne.
2. Factoriser au maximum l'expression obtenue.
3. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice associée est-elle inversible ?
4. Généralisation : Comment s'écrirait le résultat factorisé pour un déterminant de Vandermonde de taille $n \times n$ construit sur des réels $x_1, x_2, \dots, x_n$?

Exercice 14 (Inversion de matrices par blocs). Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On considère la matrice par blocs $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

1. En posant une matrice inconnue $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ structurée selon les mêmes blocs, montrer que si A et C sont inversibles, alors M l'est également.
2. Déterminer l'inverse de M sous forme de matrice par blocs en fonction de A^{-1} , C^{-1} et B .

Exercice 15 (Étude du rang avec paramètre). *Discuter, en fonction de la valeur du paramètre réel m , du rang des matrices suivantes :*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 (Matrices de rang 1 et Trace). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle de rang 1.*

1. Justifier qu'il existe deux vecteurs colonnes non nuls U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = UV^T$.
2. Calculer la trace de A en fonction de U et V .
3. En déduire l'identité remarquable : $A^2 = \text{Tr}(A)A$.
4. Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 1$.
5. Lorsque $\text{Tr}(A) \neq 1$, exprimer l'inverse $(I_n - A)^{-1}$ en fonction de I_n , de A et de $\text{Tr}(A)$.

Exercice 17 (Déterminant tridiagonal (Suite récurrente)). *Pour tout entier $n \geq 1$, on note Δ_n le déterminant de taille $n \times n$ défini par des 2 sur la diagonale principale, et des -1 sur les deux diagonales immédiatement adjacentes (tous les autres coefficients étant nuls) :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer à la main Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 .
2. En développant par rapport à la première ligne, démontrer que pour tout $n \geq 3$, on a la relation : $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.
3. En déduire l'expression explicite de Δ_n en fonction de n .

Exercice 18 (Matrice a sur la diagonale, b partout ailleurs). *Soit $n \geq 2$. On considère la matrice $M_n(a, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments diagonaux valent a , et dont tous les autres éléments valent b .*

1. Calculer le déterminant de $M_n(a, b)$ en ajoutant intelligemment toutes les colonnes à la première, puis en soustrayant la première ligne à toutes les autres.
2. À quelle(s) condition(s) sur a et b la matrice $M_n(a, b)$ est-elle inversible ?
3. Lorsqu'elle est inversible, chercher son inverse sous la forme $\alpha I_n + \beta J_n$, où J_n est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Préciser les valeurs de α et β .

Exercice 19 (Déterminant par blocs et commutation). *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent (c'est-à-dire $AB = BA$). On considère la matrice par blocs $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.*

1. Calculer le produit matriciel par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

2. En utilisant les propriétés du déterminant sur les matrices triangulaires par blocs, démontrer la factorisation :

$$\det(M) = \det(A + B) \det(A - B)$$