

Corrigé de la Feuille d'Exercices : Intégration et Suites de Fonctions

Partie I : Comportement Asymptotique et Suites d'Intégrales

Exercice 1 : Une suite d'intégrales

On note $f_n(t) = e^{-t} \sin^n(t)$.

1. **Existence** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto f_n(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. De plus, $\forall t \geq 0, |f_n(t)| \leq e^{-t}$. Or la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence). Par théorème de comparaison, I_n est absolument convergente, donc définie.
2. **Limite** : Appliquons le Théorème de Convergence Dominée (TCD).
 - **Convergence simple** : Pour tout $t \in [0, +\infty[$, si $t \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $|\sin(t)| < 1$ donc $\sin^n(t) \rightarrow 0$. Si $t \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, la suite est bornée. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle presque partout sur $\mathbb{R}_+$.
 - **Hypothèse de domination** : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, |f_n(t)| \leq e^{-t}$. La fonction dominatrice $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le TCD :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0$$

Exercice 2 : Approximation de l'unité

1. **Changement de variable** : Posons $u = nt$. L'application $t \mapsto nt$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ (pour $n \geq 1$). On a $dt = \frac{du}{n}$.

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} \frac{du}{n} = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} du$$

2. **Limite** : Appliquons le TCD à la suite de fonctions $g_n(u) = f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}$.
 - **Convergence simple** : f étant continue en 0, pour tout $u \geq 0$ fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u/n) = f(0)$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u) = f(0)e^{-u}$.
 - **Hypothèse de domination** : f étant bornée sur $\mathbb{R}_+$, il existe $M > 0$ tel que $\forall t, |f(t)| \leq M$. Alors $\forall n \geq 1, \forall u \geq 0, |g_n(u)| \leq M e^{-u}$. La fonction $u \mapsto M e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le TCD :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(0) e^{-u} du = f(0) [-e^{-u}]_0^{+\infty} = f(0)$$

Exercice 3 : Les intégrales de Wallis généralisées

1. **Convergence et J_0** : La fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$. En $+\infty$, $\frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} \sim \frac{1}{x^{3(n+1)}}$. Comme $3(n+1) \geq 3 > 1$, l'intégrale converge (Riemann). Pour $J_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, on décompose en éléments simples : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3(1+x)} + \frac{2-x}{3(1-x+x^2)}$. Le calcul donne (classique) : $J_0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
2. **Relation de récurrence** : Intégration par parties sur J_n . Posons $u = (1+x^3)^{-(n+1)}$ et $v' = 1$ (donc $v = x$).

$$J_n = \left[\frac{x}{(1+x^3)^{n+1}} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \cdot [-(n+1)3x^2(1+x^3)^{-(n+2)}] dx$$

Le terme tout intégré est nul (croissance comparée en l'infini, nul en 0).

$$J_n = 3(n+1) \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}} dx$$

On écrit $x^3 = (1+x^3) - 1$ au numérateur :

$$J_n = 3(n+1) \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^{n+2}} dx \right)$$

$$J_n = 3(n+1)(J_n - J_{n+1}) \iff (3n+3)J_{n+1} = (3n+2)J_n$$

D'où la relation : $J_{n+1} = \frac{3n+2}{3n+3} J_n = \left(1 - \frac{1}{3(n+1)}\right) J_n$.

3. **Équivalent** : On a $\frac{J_{n+1}}{J_n} = 1 - \frac{1}{3n} + o(1/n)$. Prenons le logarithme : $\ln(J_{n+1}) - \ln(J_n) = \ln(1 - \frac{1}{3(n+1)}) \sim -\frac{1}{3n}$. Par sommation des équivalents (série divergente de termes de signe constant), $\ln(J_n) \sim -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim -\frac{1}{3} \ln(n)$. Ainsi $\ln(n^{1/3} J_n) \rightarrow C$, donc $J_n \sim \frac{K}{n^{1/3}}$. (On peut montrer $K = J_0 \Gamma(1/3)$ via la fonction Gamma).

Partie II : Étude de Fonctions Définies par une Intégrale

Exercice 4 : Une transformée avec Arctan

- Définition** : La fonction intégrant $h(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[$. En 0, $h(x, t) \sim \frac{xt}{t} = x$, prolongeable par continuité. En $+\infty$, $|h(x, t)| \leq \frac{\pi/2}{t^3}$ intégrable. Donc F est définie sur $\mathbb{R}_+$. La continuité s'obtient par le théorème de continuité sous le signe somme (domination locale par $\sup_{[a,b]} |h(x, t)|$ qui reste intégrable).
- Classe $\mathcal{C}^1$** : $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{1+(xt)^2} \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)}$. Pour $x \in [a, b]$ avec $a > 0$, $|\frac{\partial h}{\partial x}| \leq \frac{1}{1+t^2}$ intégrable. Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- Calcul de $F'(x)$** : Décomposition en éléments simples (pour $x \neq 1$) : $\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2 t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2 t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)$.

$$F'(x) = \frac{1}{x^2-1} [x \arctan(xt) - \arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2-1} \left(x \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$
- Expression de $F(x)$** : $F(x) = \int \frac{\pi}{2(x+1)} dx = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$. Comme $F(0) = 0$, on a $C = 0$. D'où $F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$.
- Calcul de l'intégrale** : Calculons $K = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2} dt$ par IPP. $u = \arctan^2(t) \implies u' = \frac{2 \arctan(t)}{1+t^2}$. $v' = \frac{1}{t^2} \implies v = -\frac{1}{t}$.

$$K = \left[-\frac{\arctan^2(t)}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \arctan(t)}{t(1+t^2)} dt$$

Le terme tout intégré est nul (limites usuelles). L'intégrale restante est exactement $2F(1)$.

$$K = 2F(1) = 2 \times \frac{\pi}{2} \ln(2) = \pi \ln(2)$$

Exercice 5 : Intégrale de Dirichlet amortie

- Propriétés** : Pour $x \geq 0$, $|e^{-xt} \frac{\sin t}{t}| \leq 1$ (prolongeable en 0) et en l'infini $\leq e^{-xt}$. Si $x > 0$, convergence absolue rapide. Si $x = 0$, intégrale de Dirichlet (semi-convergente). Pour la dérivabilité sur $]0, +\infty[$, domination de la dérivée partielle $-e^{-xt} \sin(t)$ par e^{-at} sur $[a, +\infty[$.
- Calcul de $G'(x)$** :

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt} \sin(t) dt = -\operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt \right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt = \left[\frac{e^{-(x-i)t}}{-(x-i)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}$$

Donc $G'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$.

3. **Expression** : $G(x) = -\arctan(x) + C$.
4. **Limite** : Par convergence dominée (domination simple par e^{-t} pour $x \geq 1$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.
Donc $-\frac{\pi}{2} + C = 0 \implies C = \frac{\pi}{2}$. $G(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan(1/x)$.
5. **Valeur de Dirichlet** : Par continuité (admise ou prouvée via convergence uniforme), $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = G(0) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6 : Transformée de Fourier-Gauss

1. **Classe $\mathcal{C}^1$** : Fonction $h(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$. Dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial x} = -te^{-t^2} \sin(xt)$. Domination : $|\frac{\partial h}{\partial x}| \leq te^{-t^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc f est $\mathcal{C}^1$.
2. **Relation** : $f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$. IPP : $u = \sin(xt)$, $v' = -te^{-t^2} \implies v = \frac{1}{2}e^{-t^2}$.

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-t^2} (x \cos(xt)) dt$$

Le crochet est nul.

$$f'(x) = -\frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt = -\frac{x}{2} f(x)$$

3. **Résolution** : $y' + \frac{x}{2}y = 0$. Solution générale : $f(x) = Ke^{-x^2/4}$.
4. **Conclusion** : $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.

Partie III : Intégrales Généralisées et Subtilités

Exercice 7 : Un piège classique de semi-convergence

1. **Absolute convergence** : Au voisinage de $+\infty$, $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \right| \sim \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}$. Or $\int \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}$ diverge (minorée par $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}$ dont l'intégrale diverge comme $\frac{1}{2\sqrt{x}}$).
2. **Développement asymptotique** :

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right)^{-1} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

3. **Nature** :
- $\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ converge (Dirichlet ou IPP).
 - $\int O(x^{-3/2})$ converge absolument (Riemann $\alpha = 3/2 > 1$).
 - Reste $-\int \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int \frac{\cos(2x)-1}{2x} dx$. Le terme $\frac{\cos(2x)}{2x}$ converge, mais $-\frac{1}{2x}$ diverge (logarithmiquement).

Conclusion : L'intégrale diverge.

Exercice 8 : Équation différentielle et intégrale paramétrique

1. **Classe $\mathcal{C}^2$** : Domination standard sur tout segment $[a, +\infty[$ ($a > 0$) par $t^k e^{-at}$ intégrable.
2. **Équation différentielle** : $H''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

$$H''(x) + H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1)e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

3. **Équivalent** : On étudie la limite de $xH(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$. Posons $u = xt$ ($dt = du/x$).

$$xH(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2} \frac{du}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2} du$$

Appliquons le TCD :

- Convergence simple vers e^{-u} quand $x \rightarrow +\infty$.
- Domination : $\frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2} \leq e^{-u}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xH(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$. Conclusion : $H(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$.