

Colle PC : semaine 1

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(f) = f'$.

1. Quel est le noyau de ϕ ?
2. Quelle est son image ?
3. ϕ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \text{Id}$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.
2. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$.

1. Justifier que la famille $\mathcal{B} = ((X - a)^k)_{0 \leq k \leq 2n}$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $(X - a)^n(X - b)^n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

1. Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f^{p+1}$ et $\text{Im } f^p \supset \text{Im } f^{p+1}$. Montrer que les suites $(\text{Ker } f^p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im } f^p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir d'un certain rang.
2. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}^*$, si $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$ alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+q}$.
3. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$,
 - (b) $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$,
 - (c) $E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p$.
4. Donner des exemples d'endomorphismes f pour lesquels $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Exercice 5

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.
2. On suppose $u + v$ bijectif et $u \circ v = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et Δ l'endomorphisme de E défini par

$$\Delta(P) = P(X + 1) - P(X).$$

- a. Justifier que l'endomorphisme Δ est nilpotent.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, f un endomorphisme nilpotent non nul de E et p le plus petit entier tel que $f^p = \tilde{0}$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre.
2. En déduire $f^n = \tilde{0}$.